MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Appunti di Calcolo Numerico

De Fusco Marco

15 luglio 2015

master COPY COPISTERIA 050/8312126 388/9837745

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Indice

1 Analisi dell'errore 1
- 1.1 Rappresentazione in macchina di un numero . . . 1
- 1.2 Numeri di macchina . . . 2
- 1.3 Errore di rappresentazione . . . 3
- 1.4 Operazioni di macchina . . . 3
- 1.5 Problemi mal condizionati . . . 5
- 1.6 Coefficiente di amplificazione . . . 6
- 1.7 Uso dei grafi per l'analisi dell'errore . . . 8

2 Risoluzione di sistemi lineari 9
- 2.1 Norme . . . 9
- 2.2 Errori di sistema . . . 10
- 2.3 Risoluzioni di sistemi lineari . . . 12
- 2.4 Fattorizzazione LU di una matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . . . 12
- 2.5 Teorema dell'esistenza e dell'unicità della fattorizzazione LU . . . 13
- 2.6 Le matrici elementari di Gauss . . . 13
- 2.7 Teorema dell'unicità della matrice elementare di Gauss . . . 14
- 2.8 Matrici di permutazione . . . 17
- 2.9 Metodo di Gauss con pivot parziale . . . 18
- 2.10 Localizzazione degli autovalori . . . 18
- 2.11 Algoritmo di Thomas . . . 19
- 2.12 Metodi iterativi . . . 20
- 2.13 Metodo di Jacobi . . . 21
- 2.14 Metodo di Gauss-Seidel . . . 21
- 2.15 La convergenza . . . 21
- 2.16 Metodo delle potenze . . . 27

3 Risoluzione di equazioni non lineari 29
- 3.1 Metodo di bisezione . . . 29
- 3.2 Metodi di iterazione funzionale . . . 31
- 3.3 Teorema del punto fisso . . . 31
- 3.4 Metodo di Newton o delle tangenti . . . 33

4 Approssimazione di funzioni 39
- 4.1 Interpolazione di funzioni . . . 39
- 4.2 Interpolazione polinomiale . . . 39
- 4.3 Formula di Lagrange del polinomio di interpolazione . . . 40
- 4.4 Teorema del resto dell'interpolazione polinomiale . . . 41
- 4.5 Metodo dei minimi quadrati . . . 42
- 4.6 Formula di quadratura numerica . . . 43
- 4.7 Formule di Newton-Cotes . . . 44

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

4.8 Formule di Newton-Cotes iterate 45

5 Ulteriori applicazioni 47
5.1 Metodo di Eulero per la risoluzione di equazioni differenziali 47
5.2 Google 48

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745
master COPY COPISTERIA
050/8312126 388/9837745

Capitolo 1

Analisi dell'errore

1.1 Rappresentazione in macchina di un numero

Teorema di rappresentazione in base Sia x un numero reale non nullo. Allora esistono e sono unici il numero intero p e la successione $\{d_i\}_{i=1,2,\dots}$ di numeri interi, $0 \leq d_i < \beta, d_1 \neq 0$, non definitivamente uguali a $\beta - 1$, tali che

$$x = sgn(x)\beta^p \sum_{i=1}^{+\infty} d_i \beta^{-i},$$

Le quantità che compaiono nell'equazione sono dette: p, esponente, d_i, cifre della rappresentazione, e $\sum_{i=1}^{+\infty} d_i \beta^{-i}$, mantissa.

Esempio il numero $x = 0.1$ in base $\beta = 10$ si può scrivere come

$$x = 10^{-2} \cdot 10 = 10^{-2}(1 \cdot 10^{1})$$

$$x = 10^{0} \cdot 0.1 = 10^{0}(1 \cdot 10^{-1})$$

$$x = 10^{1} \cdot 0.01 = 10^{1}(0 \cdot 10^{-1} + 1 \cdot 10^{-2})$$

Delle tre rappresentazioni di x solo la seconda è quella indicata nel teorema. Infatti la prima non è della forma suddetta, dato che $\beta^{-i} = 10^1$ implica $i = -1$ ma la mantissa prende valori di $i \geq 1$, la terza invece è una rappresentazione non normalizzata, ovvero $d_1 = 0$, non rientrando nel caso preso in considerazione. Dato che tutti i numeri, tranne lo 0 hanno una rappresentazione normalizzata, si usa dire che i numeri di macchina sono rappresentati in floating point.

Problema dell'1 Ci domandiamo se 1 e $0.\bar{9}$ sono uguali oppure no. Per il teorema della rappresentazione in base:

$$0.\bar{9} = \sum_{i=1}^{+\infty} 9 \cdot 10^{-i} = 9 \cdot \sum_{i=1}^{+\infty} (\frac{1}{10})^i$$

Studiamo il comportamento della mantissa:

$$\sum_{i=1}^{+\infty} (\frac{1}{10})^i = \lim_{k \to +\infty} S_k \quad \text{con} \quad S_k = \sum_{i=1}^{k} (\frac{1}{10})^i$$

$$\begin{cases} S_k = (\frac{1}{10})^1 + (\frac{1}{10})^2 + \cdots + (\frac{1}{10})^k \\ S_{k+1} = (\frac{1}{10})^1 + (\frac{1}{10})^2 + \cdots + (\frac{1}{10})^{k+1} \end{cases} \qquad \begin{cases} S_{k+1} = S_k + (\frac{1}{10})^{k+1} \\ S_{k+1} = (\frac{1}{10})(1 + S_k) \end{cases}$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

$$\frac{1}{10} + \frac{S_k}{10} = S_k + (\frac{1}{10})^{k+1} \quad \Longrightarrow \quad S_k = [\frac{1}{10} - (\frac{1}{10})^{k+1}]\frac{10}{9}$$

dunque

$$\sum_{i=1}^{+\infty}(\frac{1}{10})^i = \lim_{k\to+\infty} S_k = \lim_{k\to+\infty}[\frac{1}{9} - \frac{1}{9}(\frac{1}{10})^k] = \frac{1}{9}$$

ovvero

$$0.\bar{9} = \sum_{i=1}^{+\infty} 9 \cdot 10^{-i} = 9 \cdot \sum_{i=1}^{+\infty}(\frac{1}{10})^i = 9 \cdot \frac{1}{9} = 1$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

1.2 Numeri di macchina

Numeri di macchina Immaginando di restringere il teorema dell'unicità della rappresentazione ai numeri espressi in base 2,

$$x = sgn(x)2^p \sum_{i=1}^{+\infty} d_i 2{-}i \text{ con } d_i \in \{0{,}1\}, d_1 = 1 \text{ e } d_i \text{ non definitivamente uguale a 1}$$

In realtà i numeri nei calcolatori si rappresentano in registri di lunghezza finita. Se la mantissa ha un numero infinito di cifre o abbastanza grande da non poter essere rappresentata del tutto si genera un errore.

Se il registro è lungo 32 bit, il primo bit si utilizza per differenziare i numeri negativi da quelli positivi, tramite + e −, gli altri 31 bit vanno ripartiti per rappresentare l'esponente della base e la mantissa.

Supponendo di utilizzare 8 bit per la rappresentazione dell'esponente e 23 bit per la rappresentazione della mantissa, degli 8, uno viene utilizzato per il segno, gli altri danno la possibilità di ottenere esponenti fino a 127, ovvero $2^7 - 1$. Si definisce insieme dei numeri di macchina l'insieme:

$$F(\beta, m, M, t) = \{x \in \mathbb{R} \colon x = \pm\beta^p \sum_{i=1}^{t} d_i\beta^{-i}, d_1 \neq 0, 0 \leq d_i \leq \beta{-}1, -m \leq p \leq M\} \cup \{0\}$$

Nel caso preso in esame d_1 non si rappresenta perchè in base 2, per ogni numero è costantemente uguale a 1, dunque $t = 23$. In oltre si effettua una rappresentazione in traslazione dell'esponente dato che $2^{-0} = 2^{+0} = 1$, dunque $M = 128$.

Si può notare che l'insieme dei numeri di macchina è simmetrico rispetto all'origine, è finito, il più piccolo numero rappresentabile in macchina è $\omega = \beta^{-m} \cdot 1 \cdot \beta^{-1} = \beta^{-(m+1)}$ (l'ipotesi del teorema dell'unicità della rappresentazione ched_i non sia definitivamente uguale a $\beta - 1$ cade dato che l'insieme è finito e non ha senso calcolarne il limite della sommatoria), il più grande positivo è $\Omega = \beta^M(\beta - 1)\sum_{p=1}^{t}\beta^{-i}$. I numeri di macchina hanno la proprietà di essere gli unici rappresentati esattamente dalla macchina tramite la rappresentazione in macchina di x, e sono più vicini a ω che a Ω, perchè l'importante è limitare l'errore relativo che si genera nella rappresentazione in macchina del numero.

Supponiamo di voler rappresentare $x \in \mathbb{R}, \quad x \notin F(\beta, m, M, t), \quad \omega \leq x \leq \Omega$, in macchina. Per farlo è necessario utilizzare una funzione, chiamata troncamento, $g\colon [\omega, \Omega] \to F(\beta, m, M, t), g(x) = \beta\sum_{i=1}^{t} d_i\beta^{-i}$. Nel troncamento non conta il valore di d_{t+1}, mentre l'arrotondamento considera anche d_{t+1}. Se $x > \Omega$ la macchina va in overflow, ovvero non riesce a rappresentare il numero perchè è troppo grande. Alcuni calcolatori continuano i calcoli prendendo come $x = \Omega$, altri si arrestano informando l'utente della generazione di un errore, come per esempio la divisione per 0. Se $0 < x < \omega$ la macchina va in underflow, ovvero non riesce a rappresentare il numero perchè è troppo piccolo. Solitamente i calcolatori continuano i conti assegnando a x il valore 0.